УДК 519.718
DOI 10.21685/2072-3040-2019-1-6

М. А. Алехина

О НАДЕЖНОСТИ СХЕМ ПРИ НЕИСПРАВНОСТЯХ ТИПА 0 НА ВЫХОДАХ ЭЛЕМЕНТОВ В ПОЛНОМ КОНЕЧНОМ БАЗИСЕ, СОДЕРЖАЩЕМ ЛИНЕЙНУЮ ФУНКЦИЮ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ И ОБОБЩЕННУЮ ДИЗЪЮНКЦИЮ[1]

Аннотация.

Актуальность и цели. Увеличение сложности современных систем переработки, передачи и хранения информации выдвигает на первый план требование к надежности и контролю различных управляющих и вычислительных систем. Актуальной проблеме построения асимптотически оптимальных по надежности схем, реализующих булевы функции и функционирующих с тривиальной оценкой ненадежности, при неисправностях типа 0 на выходах элементов в базисе, содержащем существенную линейную функцию двух переменных и обобщенную двухместную дизъюнкцию, посвящена эта статья. Неисправности элементов предполагаются статистически независимыми. Цель работы – получить ответы на вопросы: Можно ли в рассматриваемых базисах произвольную булеву функцию реализовать асимптотически оптимальной по надежности схемой и какова ненадежность этой схемы ?

Материалы и методы. В работе используются известные методы теории надежности управляющих систем.

Результаты и выводы. Доказано, что в рассматриваемых базисах для почти всех булевых функций асимптотически оптимальные по надежности схемы функционируют с ненадежностью, асимптотически равной ε при $\varepsilon \to 0$ (здесь ε – вероятность неисправности базисного элемента). Эти результаты могут быть использованы при синтезе надежных схем, а также при проектировании технических систем для повышения их надежности.

Ключевые слова: ненадежные функциональные элементы, надежность схемы, ненадежность схемы, неисправности на входах элементов.

M. A. Alekhina

ON RELIABILITY OF CIRCUITS WITH TYPE 0 FAILURES AT ELEMENTS OUTPUTS IN A FULL FINITE BASIS CONTAINING A LINEAR FUNCTION OF TWO VARIABLES AND GENERALIZED DISINCENT

Abstract.

Background. The increasing complexity of modern information processing, transmission and storage systems highlights the requirement for reliability and control of various control and computing systems. The article is devoted to the actual problem of constructing asymptotically optimal in reliability circuits that implement

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект 17-01-00451.

Boolean functions and function with a trivial unreliability estimate, for faults of type 0 at the outputs of elements in the basis containing an essential linear function of two variables and a generalized two-place disjunction. Element faults are assumed statistically independent. The goal of the work is to get answers to the following questions: Is it possible to implement an arbitrary Boolean function in the bases under consideration by an asymptotically optimal in terms of reliability scheme and what is the unreliability of this scheme?

Materials and methods. Methods of the theory of reliability of operating systems are used in work.

Results and conclusions. It is proved that in the considered bases for almost all Boolean functions, asymptotically optimal in reliability schemes function with unreliability asymptotically equal to ε as ε → 0 (here, ε is the probability of failure of the basis element). These results can be used in the synthesis of reliable circuits, as well as in the design of technical systems to increase their reliability.

Keywords: unreliable functional gates, reliability of circuits, unreliability of circuits, failures on inputs of gates.

Рассмотрим реализацию булевых функций схемами из ненадежных функциональных элементов [1] в полном конечном базисе *B*. Считаем, что все элементы базиса ненадежны, с вероятностью ε ($0<\varepsilon<1/2$) переходят в неисправные состояния типа 0 на выходах. Предполагаем также, что базис *B* содержит линейную функцию двух переменных (функцию вида $x_1 \oplus x_2 \oplus c$ ($c\in \{0,1\}$)) и хотя бы одну из функций вида $x_1^{\sigma_1} \vee x_2^{\sigma_2}$ ($\sigma_1,\sigma_2 \in \{0,1\}$).

Ранее доказано [2], что если полный базис содержит существенную линейную функцию и обобщенную конъюнкцию (функцию вида $x_1^{\sigma_1} \,\&\, x_2^{\sigma_2}$), то в этом базисе любую функцию *f* можно реализовать такой схемой *S*, что $P(S) \le \varepsilon+100\varepsilon^2$ при всех $\varepsilon\in (0,1/960]$. Следовательно, в названном базисе любую булеву функцию $f(x_1,x_2,...,x_n)$, исключая $x_1,x_2,...,x_n$, и, быть может, константу 0, можно реализовать асимптотически оптимальной по надежности схемой (определения можно найти в [1]), функционирующей с ненадежностью, асимптотически равной ε при $\varepsilon\to 0$.

Ответ на вопрос «Какова ненадежность асимптотически оптимальных по надежности схем в полных базисах, содержащих существенную линейную функцию и обобщенную дизъюнкцию?» получен в этой работе, и, забегая вперед, скажем, что результат такой же, как в случае с обобщенной конъюнкцией. Перейдем к изложению полученных результатов.

Итак, будем рассматривать полные конечные базисы, каждый из которых содержит хотя бы одно из множеств $\{x_1.x_2,\ x_1{\sim}x_2\}$ или $\{x_1.x_2,\ x_1\oplus x_2\}$, или $\{x_1\to x_2,\ x_1\oplus x_2\}$ ($x_1\to x_2=\bar{x}_1 \vee x_2$), $\{x_1\to x_2,\ x_1{\sim}x_2\}$, $\{x_1|x_2,\ x_1{\sim}x_2\}$, $\{x_1|x_2,\ x_1\oplus x_2\}$ ($x_1|x_2 =\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2$). Для первых трех множеств в работе [1] доказано, что в таких базисах почти любую булеву функцию можно реализовать асимптотически оптимальной по надежности схемой, функционирующей с ненадежностью, асимптотически равной ε при $\varepsilon\to 0$. Для базисов, содержащих хотя бы одно из множеств $\{x_1\to x_2,\ x_1{\sim}x_2\}$ или $\{x_1|x_2,\ x_1{\sim}x_2\}$, или $\{x_1|x_2,\ x_1\oplus x_2\}$, ответ на поставленный вопрос получен ниже. Для доказательств результатов предлагается использовать известный итерационный метод, а основная трудность – найти схему с подходящими вероятностями ошибок, которая бы давала требуемую (в нашем случае тривиальную) оценку ненадежности, причем о существовании такой схемы заранее ничего неизвестно. Эти схемы были найдены (рис. 1–3), и, как нетрудно видеть, они не самые простые, содержат избыточные элементы, наличие которых обеспечивает необходимое для доказательства функционирование схем.

Обозначим через G множество функций вида $x_1^{\sigma_1}x_2^{\sigma_2} \vee x_1^{\sigma_1}x_3^{\sigma_3} \vee x_2^{\sigma_2}x_3^{\sigma_3}$ ($\sigma_i \in \{0,1\}$, $i \in \{1,2,3\}$). В любом полном конечном базисе при произвольных неисправностях элементов справедливы леммы 1 и 2.

Лемма 1 [1]. Пусть функция f реализована схемой S с ненадежностью не больше $p\left(p \le 1/2\right)$. Пусть схема S_g реализует функцию $g(x_1, x_2, x_3) = x_1^{\sigma_1}x_2^{\sigma_2} \vee x_1^{\sigma_1}x_3^{\sigma_3} \vee x_2^{\sigma_2}x_3^{\sigma_3} \in G$ с ненадежностью $P(S_g)$ ($P(S_g) \le 1/2$), причем v_0 и v_1 – вероятности ошибок схемы S_g на наборах $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ и $(\bar{\sigma}_1, \bar{\sigma}_2, \bar{\sigma}_3)$ соответственно. Тогда функцию f можно реализовать схемой $\Phi(S)$, ненадежность которой $P(\Phi(S)) \le \max\{v_0, v_1\} + 3pP(S_g) + 3p^2$.

Лемма 2 [3]. Любую булеву функцию f можно реализовать такой схемой S, что $P(S) \le 5{,}2\varepsilon$ при всех $\varepsilon \in (0, 1/960]$.

Теорема 1. Пусть полный базис B содержит функции $x_1 \to x_2$, $x_1 \sim x_2$. Тогда любую булеву функцию можно реализовать такой схемой A, что $P(A) \le \varepsilon + 19\varepsilon^2$ при всех $\varepsilon \in (0, 1/960]$.

Доказательство. Для повышения надежности схем будем использовать схему S_g (рис. 1), реализующую функцию $g = x_1x_2 \vee x_1\bar{x}_3 \vee x_2\bar{x}_3$ из множества G ($\sigma_1 = 1, \sigma_2 = 1, \sigma_3 = 0$).

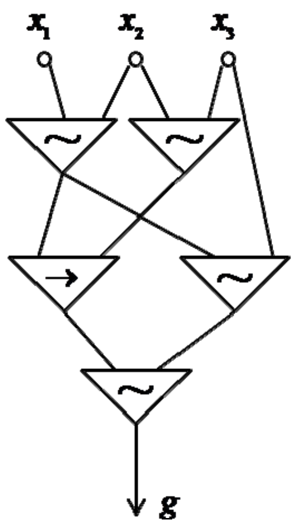

Рис. 1

Поскольку схема S_g содержит пять элементов, ее ненадежность удовлетворяет неравенству $P(S_g) \le 5\varepsilon$. Оценим сверху вероятность ошибки этой схемы на наборе (0,0,1):

$$v_1 \le \varepsilon + \sum_{i=2}^{5} C_5^i \varepsilon^i (1-\varepsilon)^{5-i} = \varepsilon + 10\varepsilon^2 (1-\varepsilon)^3 +$$

$$+10\varepsilon^3 (1-\varepsilon)^2 + 5\varepsilon^4 (1-\varepsilon) + \varepsilon^5 \le \varepsilon + 10\varepsilon^2 .$$

Аналогично оценивается вероятность ошибки v_0 схемы S_g на наборе (1,1,0):

$$v_0 \le \varepsilon + 10\varepsilon^2 (1-\varepsilon)^3 + 10\varepsilon^3 (1-\varepsilon)^2 + 5\varepsilon^4 (1-\varepsilon) + \varepsilon^5 \le \varepsilon + 10\varepsilon^2 .$$

Пусть f − произвольная булева функция. По лемме 2 ее можно реализовать схемой S с ненадежностью $P(S) \le 5,2\varepsilon$ при $\varepsilon \in (0, 1/960]$. Используя схему S_g (рис. 1), с помощью леммы 1 по схеме S построим схему $\Phi(S)$ и оценим ее ненадежность:

$$P(\Phi(S)) \le \max\{v_0, v_1\} + 3pP(S_g) + 3p^2 \le \varepsilon + 10\varepsilon^2 +$$

$$+ 3(5,2\varepsilon) \cdot 5\varepsilon + 3(5,2\varepsilon)^2 \le \varepsilon + 160\varepsilon^2 \le 1,2\varepsilon \quad \text{при } \varepsilon \in (0, 1/960] .$$

По схеме $\Phi(S)$ построим схему $\Phi^2(S)$ (применив лемму 1) и оценим ненадежность схемы $\Phi^2(S)$:

$$P(\Phi^2(S)) \le \varepsilon + 10\varepsilon^2 + 3(1,2\varepsilon) \cdot 5\varepsilon + 3(1,2\varepsilon)^2 \le$$

$$\le \varepsilon + 23\varepsilon^2 \le 1,032\varepsilon \text{ при } \varepsilon \in (0, 1/960] .$$

По схеме $\Phi^2(S)$ построим схему $\Phi^3(S)$ и воспользуемся леммой 1:

$$P(\Phi^3(S)) \le \varepsilon + 10\varepsilon^2 + 3(1,03\varepsilon) \cdot 5\varepsilon + 3(1,03\varepsilon)^2 \le \varepsilon + 19\varepsilon^2 . \square$$

Теорема 2. Пусть полный базис B содержит функции $x_1 | x_2, x_1 \sim x_2$. Тогда любую функцию можно реализовать такой схемой A, что $P(A) \le \varepsilon + 38\varepsilon^2$ при любом $\varepsilon \in (0, 1/960]$.

Доказательство. Построим схему S_g (рис. 2), реализующую функцию $g = \bar{x}_1\bar{x}_2 \vee \bar{x}_1\bar{x}_3 \vee \bar{x}_2\bar{x}_3$ из множества G ($\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = 0$).

Поскольку схема S_g содержит 6 элементов, ее ненадежность удовлетворяет неравенству $P(S_g) \le 6\varepsilon$. Оценим вероятность ошибки этой схемы на наборе (1,1,1):

$$v_1 \le \varepsilon + \sum_{i=2}^{5} C_5^i \varepsilon^i (1-\varepsilon)^{5-i} \le \varepsilon + 15\varepsilon^2 (1-\varepsilon)^4 + 20\varepsilon^3 (1-\varepsilon)^3 +$$

$$+15\varepsilon^4 (1-\varepsilon)^2 + 6\varepsilon^5 (1-\varepsilon) + \varepsilon^6 \le \varepsilon + 15\varepsilon^2 .$$

Аналогично получается верхняя оценка для вероятности ошибки v_0 схемы S_g на наборе (0,0,0):

$$v_0 \le \varepsilon + 15\varepsilon^2 (1-\varepsilon)^4 + 20\varepsilon^3 (1-\varepsilon)^3 + 15\varepsilon^4 (1-\varepsilon)^2 + 6\varepsilon^5 (1-\varepsilon) + \varepsilon^6 \le \varepsilon + 15\varepsilon^2 .$$

Пусть f – произвольная булева функция. По лемме 2 ее можно реализовать схемой S с ненадежностью $P(S) \le 5,2\varepsilon$ при $\varepsilon \in (0, 1/960]$. Используя схему S_g (рис. 2), с помощью леммы 1 по схеме S построим схему $\Phi(S)$, затем по схеме $\Phi(S)$ построим схему $\Phi^2(S)$, а по схеме $\Phi^2(S)$ – схему $\Phi^3(S)$.

Оценим ненадежность этих схем с помощью леммы 1:

$$P(\Phi(S)) \le \max\{v_0, v_1\} + 3p\mathrm{P}(S_g) + 3p^2 \le \varepsilon + 15\varepsilon^2 + 3(5,2\varepsilon)\cdot 6\varepsilon + 3(5,2\varepsilon)^2 \le$$

$$\le \varepsilon + 193\varepsilon^2 \le 1,2\varepsilon \text{ при } \varepsilon \in (0, 1/960];$$

$$P(\Phi^2(S)) \le \varepsilon + 15\varepsilon^2 + 3(1,2\varepsilon)\cdot 6\varepsilon + 3(1,2\varepsilon)^2 \le$$

$$\le \varepsilon + 41\varepsilon^2 \le 1,05\varepsilon \text{ при } \varepsilon \in (0, 1/960];$$

$$P(\Phi^3(S)) \le \varepsilon + 15\varepsilon^2 + 3(1,05\varepsilon)\cdot 6\varepsilon + 3(1,05\varepsilon)^2 \le \varepsilon + 38\varepsilon^2 . \ \square$$

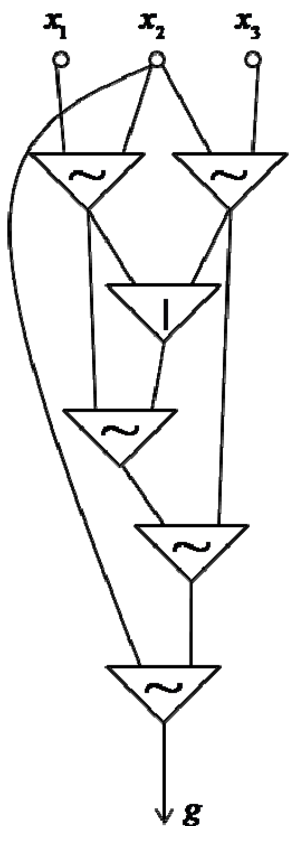

Рис. 2

Теорема 3. Пусть полный базис B содержит функции $x_1 | x_2$, $x_1 \oplus x_2$. Тогда любую функцию можно реализовать такой схемой A, что $P(A) \le \varepsilon + 38\varepsilon^2$ при любом $\varepsilon \in (0, 1/960]$.

Доказательство такое же, как в теореме 2. Построим схему S_g из шести элементов (рис. 3), реализующую функцию $g = \bar{x}_1 x_2 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_3 \vee x_2 \bar{x}_3$ из множества G ($\sigma_1 = 0, \sigma_2 = 1, \sigma_3 = 0$). Далее все рассуждения и вычисления такие же, как в теореме 2.

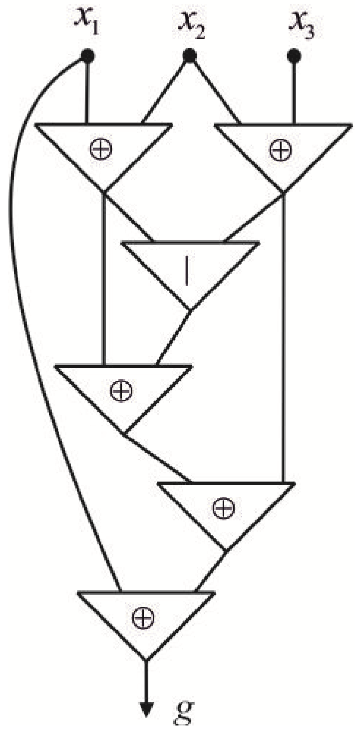

Рис. 3

Вывод: доказано, что если полный базис содержит функцию вида $x_1^a \vee x_2^b$ и функцию вида $x_1 \oplus x_2 \oplus c$ (a, b, $c \in \{0,1\}$), то любую булеву функцию $f(x_1, x_2, ..., x_n)$, кроме $x_1, x_2, ..., x_n$, и, быть может, константы 0, можно реализовать асимптотически оптимальной по надежности схемой, функционирующей с (тривиальной) ненадежностью, асимптотически равной ε при $\varepsilon \to 0$.

Этот результат отличается от ранее известного результата, например, для полного базиса $\{x_1 | x_2\}$, в котором почти любую булеву функцию $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ можно реализовать асимптотически оптимальной по надежности схемой, функционирующей с ненадежностью, асимптотически равной 2ε при $\varepsilon \to 0$, т.е. дополнив этот полный базис линейной функцией, существенно зависящей от двух переменных, получаем лучшую (в 2 раза) оценку ненадежности схем.

Библиографический список

1. **Алехина, М. А.** О надежности схем в произвольном полном конечном базисе при однотипных константных неисправностях на выходах элементов / М. А. Алехина // Дискретная математика. – 2012. – Т. 24. – С. 17–24.
2. **Алехина, М. А.** Об асимптотически оптимальных по надежности схемах в базисах, содержащих существенную линейную функцию и функцию вида $x_1^a \& x_2^b$ / М. А. Алехина, Д. М. Клянчина // Проблемы теоретической кибернетики : материалы XVI Междунар. конф. (г. Нижний Новгород, 20–25 июня 2011 г.). – Нижний Новгород : Изд-во Нижегородского госуниверситета, 2011. – С. 33–37.
3. **Алехина, М. А.** Верхняя оценка ненадежности схем в полном конечном базисе (в P_2) при произвольных неисправностях элементов / М. А. Алехина, Ю. С. Гусынина, Т. А. Шорникова // Известия высших учебных заведений. Математика. – 2017. – № 12. – С. 80–83.

References

1. Alekhina M. A. *Diskretnaya matematika* [Discrete mathematics]. 2012, vol. 24, pp. 17–24. [In Russian]
2. Alekhina M. A., Klyanchina D. M. *Problemy teoreticheskoy kibernetiki: materialy XVI Mezhdunar. konf. (g. Nizhniy Novgorod, 20–25 iyunya 2011 g.)* [Problems of theoretical cybernetics: proceedings of XVI International conference (Nizhny Novgorod, 20-25th of June 2011)]. Nizhniy Novgorod: Izd-vo Nizhegorodskogo gosuniversiteta, 2011, pp. 33–37. [In Russian]
3. Alekhina M. A., Gusynina Yu. S., Shornikova T. A. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Matematika* [University proceedings. Mathematics]. 2017, no. 12, pp. 80–83. [In Russian]

Алехина Марина Анатольевна
доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой математики, Пензенский государственный технологический университет (Россия, г. Пенза, проезд Байдукова /ул. Гагарина, 1а/11)

Alekhina Marina Anatol'evna
Doctor of physical and mathematical sciences, professor, head of the sub-department of mathematics, Penza State Technological University (1a/11 Baydukova lane/Gagarina street, Penza, Russia)

E-mail: alekhina@penzgtu.ru

Образец цитирования:

Алехина, М. А. О надежности схем при неисправностях типа 0 на выходах элементов в полном конечном базисе, содержащем линейную функцию двух переменных и обобщенную дизъюнкцию / М. А. Алехина // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2019. – № 1 (49). – С. 56–62. – DOI 10.21685/2072-3040-2019-1-6.